О ЕДИНСТВЕННОСТИ В ЦЕЛОМ РЕШЕНИЯ ПОЧТИ ВСЮДУ ОДНОМЕРНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Э.И.АЗИЗБЕКОВ
Бакинский Государственный Университет
azel_azerbaijan@mail.ru

В работе рассматривается одномерная смешанная задача с несамосопряженными граничными условиями типа Ионкина для одного класса полулинейных псевдогиперболических уравнений четвертого порядка типа Соболева. Решение изучаемой смешанной задачи ищется в виде некоторого биортогонального ряда, причем нахождение неизвестных биортогональных коэффициентов этого ряда сводится к решению определенной счетной системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. Далее, с помощью неравенства Беллмана доказана теорема о единственности в целом решения почти всюду изучаемой смешанной задачи.

В данной работе исследуется единственность в целом решения почти всюду следующей одномерной несамосопряженной смешанной задачи для одного класса полулинейных дифференциальных уравнений четвертого порядка:

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) + u_{xxxx}(t,x) - \alpha\, u_{ttxx}(t,x) = \\ = F(t,x,u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x),u_{tx}(t,x),u_{xx}(t,x),u_{txx}(t,x),u_{xxx}(t,x)) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (0 \le t \le T,\ 0 \le x \le 1), \quad (1) \\ u(0,x) = \varphi(x) \quad (0 \le x \le 1), \quad u_t(0,x) = \psi(x) \quad (0 \le x \le 1), \qquad (2) \\ u(t,0) = 0\,, u_x(t,0) = u_x(t,1),\ \ u_{xx}(t,0) = 0, u_{xxx}(t,0) = u_{xxx}(t,1) \ \ (0 \le t \le T), \quad (3) \end{cases}$$

где $\alpha > 0$ -фиксированное число; $0 < T < +\infty$; F, φ, ψ - заданные функции, а $u(t,x)$ - искомая функция, причем под решением почти всюду задачи (1)-(3) понимаем следующее

Определение. Под решением почти всюду задачи (1)-(3) понимаем функцию $u(t,x)$, обладающую свойствами:

а) $u(t,x), u_x(t,x), u_{xx}(t,x), u_{xxx}(t,x), u_t(t,x), u_{tx}(t,x),$
$u_{txx}(t,x),\ u_{tt}(t,x),\ u_{ttx}(t,x) \in C([0,T]\times[0,1])$;

$u_{xxxx}(t,x), u_{ttxx}(t,x) \in C([0,T]; L_2(0,1))$;

б) уравнение (1) удовлетворяется почти всюду в $(0,T)\times(0,1)$;

в) все условия (2) и (3) удовлетворяются в обычном смысле.

В работе решение почти всюду задачи (1)-(3) ищется в виде

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \mathsf{X}_k(x) \ , \tag{4}$$

где

$$\mathsf{X}_0(x) = x, \ldots, \mathsf{X}_{2k-1}(x) = x\cos 2k\pi x,\ \mathsf{X}_{2k}(x) = \sin 2k\pi x\ , \ldots, \tag{5}$$

$$u_k(t) = \int_0^1 u(t,x) \mathsf{Y}_k(x)dx \ \ (k = 0,1,\ldots; t \in [0,T]), \tag{6}$$

$$\mathsf{Y}_0(x)=2,\ldots,\ \mathsf{Y}_{2k-1}(x)=4\cos 2k\pi x,\ \mathsf{Y}_{2k}(x)=4(1-x)\sin 2k\pi x,\ldots. \tag{7}$$

Справедлива следующая

Лемма 1. Последовательности функций (5) и (7) образуют биортогональную в $L_2(0,1)$ систему функций [1].

Исходя из определения решения почти всюду задачи (1)-(3) доказывается следующая

Лемма 2. Если $u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)\mathsf{X}_k(x)$ - любое решение почти всюду задачи (1)-(3), то функции $u_k(t)$ $(k = 0,1,\ldots)$ удовлетворяют следующей счетной системе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений:

$$u_0(t) = \varphi_0 + \psi_0 \cdot t + \int_0^t\int_0^1 (t-\tau) \mathsf{F}\,(u(\tau,x))\mathsf{Y}_0(x)dx\,d\tau \qquad (t \in [0,T]), \tag{8}$$

$$u_{2k-1}(t) = \varphi_{2k-1} \cdot \cos\frac{4\pi^2k^2}{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}t + \psi_{2k-1}\cdot\frac{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}{4\pi^2k^2}\cdot\sin\frac{4\pi^2k^2}{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}t +$$

$$+\frac{1}{4\pi^2k^2\cdot\sqrt{1+4\alpha\,\pi^2k^2}}\cdot\int_0^t\int_0^1 \mathsf{F}\,(u(\tau,x))\mathsf{Y}_{2k-1}(x)\times$$

$$\times\sin\frac{4\pi^2k^2}{\sqrt{1+4\alpha\,\pi^2k^2}}(t-\tau)dx\,d\tau \qquad (k=1,2,\ldots;\ \ t\in[0,T]), \tag{9}$$

$$u_{2k}(t) = -\varphi_{2k-1}\cdot\frac{4\pi k\cdot(1+2\pi^2k^2)}{(1+4\alpha\pi^2k^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot t\cdot\sin\frac{4\pi^2k^2}{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}t +$$

$$+\varphi_{2k}\cdot\cos\frac{4\pi^2k^2}{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}t - \psi_{2k-1}\cdot\frac{1+2\alpha\pi^2k^2}{\pi k\cdot(1+4\alpha\pi^2k^2)}\times$$

$$\times\left\{\frac{\sqrt{1+4\alpha\,\pi^2k^2}}{4\pi^2k^2}\cdot\sin\frac{4\pi^2k^2}{\sqrt{1+4\alpha\,\pi^2k^2}}t - t\cdot\cos\frac{4\pi^2k^2}{\sqrt{1+4\alpha\,\pi^2k^2}}t\right\}+$$

$$+\psi_{2k}\cdot\frac{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}{4\pi^2k^2}\cdot\sin\frac{4\pi^2k^2}{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}t-\frac{\alpha}{\pi k\cdot(1+4\alpha\pi^2k^2)^{\frac{3}{2}}}\times$$

$$\times\int_0^t\int_0^1 \mathsf{F}(u(\tau,x))\mathsf{Y}_{2k-1}(x)\cdot\sin\frac{4\pi^2k^2}{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}(t-\tau)dx\,d\tau-$$

$$-\frac{2(1+2\alpha\pi^2k^2)}{\pi k\cdot(1+4\alpha\pi^2k^2)^2}\cdot\int_0^t\left[\int_0^\tau\int_0^1 \mathsf{F}(u(\sigma,x))\mathsf{Y}_{2k-1}(x)\times\right.$$

$$\left.\times\sin\frac{4\pi^2k^2}{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}(\tau-\sigma)dxd\sigma\right]\times\sin\frac{4\pi^2k^2}{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}(t-\tau)d\tau+$$

$$+\frac{1}{4\pi^2k^2\cdot\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}\times\int_0^t\int_0^1 \mathsf{F}(u(\tau,x))\mathsf{Y}_{2k}(x)\times$$

$$\times\sin\frac{4\pi^2k^2}{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}(t-\tau)dxd\tau \qquad (k=1,2,\ldots;\ t\in[0,T]), \tag{10}$$

где

$$\varphi_k\equiv\int_0^1\varphi(x)\mathsf{Y}_k(x)dx\quad(k=0,1,\ldots),\quad \psi_k\equiv\int_0^1\psi(x)\mathsf{Y}_k(x)dx\quad(k=0,1,\ldots), \tag{11}$$

$$\mathsf{F}(u(t,x))\equiv F(t,x,u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x),u_{tx}(t,x),u_{xx}(t,x),u_{txx}(t,x),u_{xxx}(t,x)), \tag{12}$$

а функции $\mathsf{X}_k(x)$ и $\mathsf{Y}_k(x)$ определены соотношениями (5) и (7), соответственно.

В дальнейшем нам удобно будет в системе (8)-(10) вместо функций $\mathsf{Y}_k(x)$ $(k=0,1,\ldots)$ подставлять их значения, определяемые соотношением (7). Таким образом, система (8)-(10) принимает вид:

$$u_0(t)=\varphi_0+\psi_0\cdot t+2\int_0^t\int_0^1(t-\tau)\mathsf{F}(u(\tau,x))dx\,d\tau \qquad (t\in[0,T]), \tag{13}$$

$$u_{2k-1}(t)=\varphi_{2k-1}\cdot\cos\frac{4\pi^2k^2}{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}t+\psi_{2k-1}\cdot\frac{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}{4\pi^2k^2}\cdot\sin\frac{4\pi^2k^2}{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}t+$$

$$+\frac{1}{\pi^2k^2\cdot\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}\cdot\int_0^t\int_0^1 \mathsf{F}(u(\tau,x))\cos 2\pi kx\times$$

$$\times\sin\frac{4\pi^2k^2}{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}(t-\tau)dxd\tau \qquad (k=1,2,\ldots;\ t\in[0,T]), \tag{14}$$

$$u_{2k}(t)=-\varphi_{2k-1}\cdot\frac{4\pi k\cdot(1+2\alpha\pi^2k^2)}{(1+4\alpha\pi^2k^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot t\cdot\sin\frac{4\pi^2k^2}{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}t+$$

$$+\varphi_{2k}\cdot\cos\frac{4\pi^2k^2}{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}t-\psi_{2k-1}\cdot\frac{1+2\alpha\pi^2k^2}{\pi k\cdot(1+4\alpha\pi^2k^2)}\times$$

$$\times\left\{\frac{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}{4\pi^2k^2}\cdot\sin\frac{4\pi^2k^2}{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}t-t\cdot\cos\frac{4\pi^2k^2}{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}t\right\}+$$

$$+\psi_{2k}\cdot\frac{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}{4\pi^2k^2}\cdot\sin\frac{4\pi^2k^2}{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}t-\frac{4\alpha}{\pi k\cdot(1+4\alpha\pi^2k^2)^{\frac{3}{2}}}\times$$

$$\times\int_0^t\int_0^1\mathsf{F}(u(\tau,x))\cos 2\pi kx\cdot\sin\frac{4\pi^2k^2}{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}(t-\tau)dx\,d\tau-$$

$$-\frac{8(1+2\alpha\pi^2k^2)}{\pi k\cdot(1+4\alpha\pi^2k^2)^2}\cdot\int_0^t\left[\int_0^\tau\int_0^1\mathsf{F}(u(\sigma,x))\cos 2\pi kx\times\right.$$

$$\left.\times\sin\frac{4\pi^2k^2}{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}(\tau-\sigma)dxd\sigma\right]\cdot\sin\frac{4\pi^2k^2}{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}(t-\tau)d\tau+$$

$$+\frac{1}{\pi^2k^2\cdot\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}\cdot\int_0^t\int_0^1\mathsf{F}(u(\tau,x))\cdot(1-x)\sin 2\pi kx\times$$

$$\times\sin\frac{4\pi^2k^2}{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}(t-\tau)dxd\tau\qquad(k=1,2,\ldots;\ \ t\in[0,T]).\qquad(15)$$

Теорема. Пусть

1. $F(t,x,u_1,\ldots,u_7)\in C([0,T]\times[0,1]\times(-\infty,\infty)^7)$.
2. $\forall R>0$ в $[0,T]\times[0,1]\times[-R,R]^7$

$$\left|F(t,x,u_1,\ldots,u_7)-F(t,x,\tilde{u}_1,\ldots,\tilde{u}_7)\right|\le C_R\cdot\sum_{i=1}^{7}\left|u_i-\tilde{u}_i\right|,\qquad(16)$$

где $C_R>0$–постоянная.

Тогда задача (1)-(3) не может иметь более одного решения почти всюду.

Доказательство. Пусть $u(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(t)\mathrm{X}_k(x)$ и $\tilde{u}(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{u}_k(t)\mathrm{X}_k(x)$ - два любых решения почти всюду задачи (1)-(3). В силу леммы 2 функции $u_k(t)$ $(k=0,1,\ldots)$ и $\tilde{u}_k(t)$ $(k=0,1,\ldots)$ удовлетворяют на $[0,T]$ системе (8)-(10), т.е. системе (13)-(15), причем для функций $\tilde{u}_k(t)$ $(k=0,1,\ldots)$ в правых частях (13)-(15) вместо $u(\tau,x)$ нужно иметь в виду $\tilde{u}(\tau,x)$.

Далее, так как каждое решение почти всюду задачи (1)-(3) является и ее обобщенным решением, то, как показано в работе [2], для любого обобщенного решения $u(t,x)$ задачи (1)-(3) и, тем более, для любого решения почти всюду $u(t,x)$ задачи (1)-(3) справедлива оценка:

$$\|u\|^2_{B^{3,2}_{2,2,T}} \le a_0 + b_0 \cdot \int_0^T \int_0^1 \{\mathsf{F}(u(\tau,x))\}^2 \, dx\, d\tau \,, \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned} a_0 \equiv\ & 6\varphi_0^2 + \frac{6}{\alpha^2} \cdot \{\alpha(1+8T^2) + 4[\alpha\pi^2 + 2(\sqrt{\alpha} + 2\pi T)^2]\} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (k^3 \cdot \varphi_{2k-1})^2 + \\ & + 12\left(1 + \frac{4\pi^2}{\alpha}\right) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (k^3 \cdot \varphi_{2k})^2 + 6T^2 \cdot \psi_0^2 + 6\left[\frac{1}{16\pi^4}(1+4\alpha\pi^2) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\pi^4}(4T\pi^2 + \sqrt{1+4\alpha\pi^2})^2 + \frac{1}{\alpha}(\alpha + 8T^2)\right] \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (k^2 \cdot \psi_{2k-1})^2 + \\ & + 6\left[\frac{1}{8\pi^4}(1+4\alpha\pi^2) + 2\right] \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (k^2 \cdot \psi_{2k})^2, \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} b_0 \equiv\ & \frac{T}{4\alpha^2\pi^8} \cdot \{32\alpha^2\pi^8 T^2 + 3\alpha\pi^2 + 6[(\sqrt{\alpha} + 4\pi T)^2 + \alpha\pi^2]\} + \\ & + \frac{T}{\alpha^3\pi^6} \cdot \{16\alpha^3\pi^6 + 3\alpha\pi^2 + 6[(\sqrt{\alpha} + 4\pi T)^2 + \alpha\pi^2]\}, \end{aligned} \tag{19}$$

числа φ_k и ψ_k определены соотношением (11), а оператор F определен соотношением (12).

В силу условия 1 данной теоремы, очевидно, что для любого решения почти всюду $u(t,x)$ задачи (1)-(3) функция $\mathsf{F}(u(t,x)) \in C([0,T]\times[0,1])$.Тогда из (17) следует, что $u(t,x) \in B^{3,2}_{2,2,T}$ ([5]). Таким же образом, $\tilde{u}(t,x) \in B^{3,2}_{2,2,T}$, где $\tilde{u}(t,x)$-функция, упомянутая в самом начале доказательства данной теоремы. Следовательно, $u(t,x) - \tilde{u}(t,x) \in B^{3,2}_{2,2,T}$.

Далее, как показано в работе [2], $\forall t \in [0,T]$:

$$\|u - \tilde{u}\|^2_{B^{3,2}_{2,2,t}} \le b_0 \cdot \int_0^t \int_0^1 \{\mathsf{F}(u(\tau,x)) - \mathsf{F}(\tilde{u}(\tau,x))\}^2 \, dx d\tau \,, \tag{20}$$

где число b_0 определено соотношением (19).

Очевидно, что существует такое число $R_0 > 0$, что $\forall t \in [0,T]$ и $x \in [0,1]$:

$$-R_0 \le u(t,x), u_t(t,x), u_x(t,x), u_{tx}(t,x), u_{xx}(t,x), u_{txx}(t,x), u_{xxx}(t,x) \le R_0,$$

$$-R_0 \le \tilde{u}(t,x), \tilde{u}_t(t,x), \tilde{u}_x(t,x), \tilde{u}_{tx}(t,x), \tilde{u}_{xx}(t,x), \tilde{u}_{txx}(t,x), \tilde{u}_{xxx}(t,x) \le R_0.$$

Тогда, пользуясь условием (16) (для $R = R_0$), из (20) получаем, что $\forall t \in [0,T]$:

$$\|u-\tilde{u}\|^2_{B^{3,2}_{2,2,t}} \le 7b_0 \cdot C^2_{R_0} \cdot \int_0^t \left\{ \int_0^1 |u(\tau,x)-\tilde{u}(\tau,x)|^2 dx + \int_0^1 |u_\tau(\tau,x)-\tilde{u}_\tau(\tau,x)|^2 dx + \right.$$

$$+\int_0^1 |u_x(\tau,x)-\tilde{u}_x(\tau,x)|^2 dx + \int_0^1 |u_{x\tau}(\tau,x)-\tilde{u}_{x\tau}(\tau,x)|^2 dx +$$

$$+\int_0^1 |u_{xx}(\tau,x)-\tilde{u}_{xx}(\tau,x)|^2 dx + \int_0^1 |u_{xx\tau}(\tau,x)-\tilde{u}_{xx\tau}(\tau,x)|^2 dx +$$

$$\left. +\int_0^1 |u_{xxx}(\tau,x)-\tilde{u}_{xxx}(\tau,x)|^2 dx \right\} d\tau. \qquad (21)$$

Далее, продолжая рассуждения, проведенные в работе [2] при доказательстве теоремы о единственности обобщенного решения задачи (1)-(3), получаем, что $u=\tilde{u}$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием// ДУ, 1977, т. 13, №2, с. 294-304.
2. Худавердиев К.И., Азизбеков Э.И. Исследование обобщенного решения одной одномерной несамосопряженной смешанной задачи для одного класса полулинейных псевдогиперболических уравнений четвертого порядка//Бакинский Государственный Университет, Баку: 2001 г., 70 с. (рукопись депонирована в АзНИИНТИ 09.11.2001, №2735 - Аз. 2001).
3. Худавердиев К.И. К теории многомерных смешанных задач для нелинейных гиперболических уравнений. Дис... докт. физ.-мат. наук – Баку: 1973 г., 319 с, Азербайджанский Государственный Университет.
4. Азизбеков Э.И. О разрешимости почти всюду одной одномерной смешанной задачи с несамосопряженными граничными условиями для одного класса полулинейных псевдогиперболических уравнений четвертого порядка//Тезисы научной конференции, посвященной 85-летию общенационального лидера Азербайджана Г.А. Алиева, Баку: 2008 г., с.6-7.
5. Худавердиев К.И., Исмаилов А.И. Исследование классического решения одной несамосопряженной одномерной обратной краевой задачи для одного класса полулинейных дифференциальных уравнений третьего порядка// Бакинский Государственный Университет, Баку: 1998 г., 110 с. (рукопись депонирована в АзНИИНТИ 02.03.1998, №2566-Аз.98).

DÖRDÜNCÜ TƏRTİB YARIM-XƏTTİ PSEVDOHİPERBOLİK TƏNLİKLƏR ÜÇÜN ÖZ-ÖZÜNƏ QOŞMA OLMAYAN SƏRHƏD ŞƏRTLİ BİRÖLÇÜLÜ QARIŞIQ MƏSƏLƏNİN SANKİ HƏR YERDƏ HƏLLİNİN QLOBAL YEGANƏLİYİ HAQQINDA

E.İ.ƏZİZBƏYOV

XÜLASƏ

İşdə bir sinif Sobolev tipli yarım-xətti psevdohiperbolik tənliklər üçün İonkin tipli öz-özünə qoşma olmayan sərhəd şərtli birölçülü qarışıq məsələyə baxılır.Məsələnin həlli müəyyən biortoqonal sıra şəklində axtarılır və bu sıranın naməlum biortoqonal əmsallarının tapılması müəyyən hesabi qeyri-xətti inteqro-diferensial tənliklər sisteminin həllinə gətirilir. Sonra isə Bellman bərabərsizliyinin köməyilə öyrənilən qarışıq məsələnin sanki hər yerdə həllinin qlobal yeganəliyi haqqında teorem isbat edilir.

ON THE UNIQUENESS OF GLOBAL SOLUTION OF ALMOST ONE-DIMENSIONAL MIXED PROBLEM FOR THE FOURTH ORDER PSEUDOHYPERBOLIC EQUATIONS WITH NON-SELF-ADJOINT BOUNDARY CONDITIONS

E.I.AZIZBAYOV

SUMMARY

A one-dimensional mixed problem with non-self-adjoint boundary conditions of Ionkin type is considered for a class of Sobolev type semi-linear pseudohyperbolic equations of the fourth order. The solution of the studied mixed problem is found in the form of some biorthogonal series and finding of the unknowns of this series is reduced to the solution of definite denumerable system of nonlinear integro-differential equations. Further, a theorem on the uniqueness of the global solution of almost everywhere solution of the mixed problem is proved by means of Bellman inequality.